В.К. Доманский
СПбЭМИ РАН, Санкт Петербург
В.Л. Крепс
СПбЭМИ РАН, Санкт Петербург

Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках[1]

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, в которой два игрока ведут между собой многошаговые торги рисковыми ценными бумагами (акциями). Один из игроков (инсайдер) знает ликвидную цену акции, второй знает только ее вероятностное распределение. Показано, что оптимальная стратегия инсайдера порождает симметричное случайное блуждание цен сделок. Этот результат подтверждает гипотезу о возможном стратегическом происхождении регулярных стохастических колебаний цен на фондовом рынке.

Ключевые слова: *многошаговые торги, асимметричная информация, повторяющаяся игра с неполной информацией, оптимальная стратегия, случайное блуждание.*

Классификация JEL**:** C73; D82; D44.

1. Введение

1.1. Происхождение случайных колебаний цен на фондовом рынке

Начиная с работы (Bachelier, 1900) для описания эволюции цен на финансовых рынках финансовая теория использует вероятностную модель случайных блужданий, т.е. равновероятных разнонаправленных скачков, и ее непрерывный аналог – винеровский случайный процесс, или броуновское движение. Историю вопроса и библиографию см. в книге (Ширяев, 1998). Возникновение регулярных случайных колебаний цен, наблюдаемых при статистическом анализе временных рядов, принято объяснять влиянием на процесс ценообразования многочисленных независимых слабых внешних воздействий, подверженных случайным изменениям во времени.

Однако гипотеза о полностью экзогенном происхождении этих осцилляций не является удовлетворительной. С одной стороны, такие внешние воздействия (как, например, политические события, использование фирмой новой технологии и т.п.) носят шоковый характер. Они должны были бы привести к скачкам ценового процесса. С другой стороны, в большинстве случаев даже шоковые воздействия, если информация о них не является общим достоянием, не приводят к значительным ценовым скачкам.

Недавно возникла гипотеза о возможном эндогенном происхождении регулярных случайных флуктуаций в ценовом процессе: колебания цен могут порождаться маскировочными действиями инсай-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 07-06-00174а и 10-06-00369а).

Авторы благодарят Бернара Де Мейера за полезные обсуждения, особенно во время пребывания в Университете Париж-1 (ноябрь–декабрь 2008 г.), а также анонимного рецензента, замечания которого привели к существенному улучшению подачи материала.

дера. Биржевые агенты, имеющие дополнительную инсайдерскую информацию, при длительном взаимодействии неизбежно выдают эту информацию другим участникам рынка через свои действия. Однако инсайдер не заинтересован в немедленном обнаружении своей приватной информации, влекущем утрату стратегического преимущества. Это стремление инсайдера скрывать свою информацию понуждает его к стратегическому маневрированию, выражающемуся в рандомизации своих действий. Именно эта рандомизация приводит к сглаживанию резких скачков рыночных цен и влечет появление в их эволюции броуновской компоненты.

Впервые гипотеза об эндогенном происхождении случайных флуктуаций цен на фондовом рынке была высказана в работе (Kyle, 1985), но в модели Кайла эта идея просматривается недостаточно явственно. Броуновское движение, по сути дела, вводится в модель извне. Значительно убедительнее идея эндогенного происхождения случайных колебаний цен продемонстрирована в работе (De Meyer, Saley, 2002) с помощью упрощенной модели многошаговых торгов однотипными акциями. Торги ведут между собой два игрока. Случайная цена акции может принимать два значения (низкое или высокое). Перед началом торгов случайный ход (формализация шокового события) определяет цену акции на весь период торгов. Выбранная цена сообщается игроку 1 и не сообщается игроку 2. Оба игрока знают вероятность высокой цены акции.

В работе (De Meyer, Saley, 2002) авторами была получена асимптотика случайной последовательности цен сделок, порождаемых оптимальным поведением игроков, и продемонстрировано наличие в этой асимптотике винеровской компоненты. Б. де Мейер и Х. Салей рассматривают это явление как ключевой пункт для мотивировки эндогенного происхождения броуновского движения в финансовой теории.

В модели Мейера–Салей игроки могут делать произвольные ставки. Поскольку реальные торги проводятся в тех или иных денежных единицах, представляется более реалистичным, что игроки могут назначать только дискретные ставки, пропорциональные этой минимальной денежной единице.

В работах (Domansky, 2007; Доманский, Крепс, 2007) рассмотрен дискретный аналог модели Мейера–Салей с двумя возможными целочисленными ликвидными ценами акции 0 и m. Допустимы любые целочисленные ставки (единица измерения равна минимальной денежной единице), однако осмысленными являются только ставки $0,\dots,m-1$. Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией у второго игрока с двумя состояниями и с m действиями у каждого из игроков (см. монографию (Aumann, Maschler, 1995)).

Результат, полученный для модели с двумя возможными значениями цены акции, находится в соответствии с гипотезой о стратегическом происхождении случайных флуктуаций цен на фондовых рынках. Установлено, что в соответствующей игре оптимальная стратегия инсайдера порождает симметричное случайное блуждание цен совершенных сделок. Блуждание совершается по множеству допустимых ставок с поглощением в крайних точках. Поглощение происходит после использования игроком 1 действий 0 и $m-1$. Случайный момент поглощения представляет собой момент, когда оценка игроком 2 ликвидной цены акции совпадает с истинным значением этой цены (игрок 2 обнаруживает истинную цену акции). В этот момент торги могут быть закончены, так как последующий выигрыш игрока 1 равен нулю.

В настоящей работе будет исследована модель с произвольными неотрицательными целочисленными значениями случайной цены акции. Это значение выбирается перед началом игры случайным ходом согласно известному обоим игрокам вероятностному распределению на множестве целых неотрицательных чисел. Допустимы произвольные неотрицательные целочисленные ставки. Рассмотренные в (Domansky, 2007; Доманский, Крепс, 2007) частные случаи модели с двумя возможными значениями цены акции соответствуют распределениям с двухточечными носителями.

Для данной более реалистичной модели мы устанавливаем, что оптимальная стратегия инсайдера порождает симметричное случайное блуждание цен сделок. Блуждание носит более сложный характер. В частности, поглощение, т.е. обнаружение игроком 2 истинной цены акции, может произойти после каждого шага, начиная с нулевого. Последнее происходит в ситуации, когда выбранная перед началом игры случайным ходом цена акции совпадает со своим математическим ожиданием, что невозможно для распределения с двухточечным носителем. Более подробное описание возникающих в рассматриваемых моделях случайных блужданий дается в п. 1.3–1.4.

Появление случайного блуждания цен сделок в более общей модели означает, что этот феномен не является специфическим свойством частной модели, и подтверждает гипотезу о возможном стратегическом происхождении случайных флуктуаций цен на фондовых рынках: флуктуации могут возникать как следствие маскировочных действий инсайдера.

1.2. Модель многошаговых торгов с дискретными ставками и повторяющиеся игры с асимметричной информацией

Два игрока с противоположными интересами имеют деньги и однотипные акции. Случайная ликвидная цена акции может принимать произвольные неотрицательные целочисленные значения. На нулевом шаге случайный ход определяет ликвидную цену акции на весь период торгов согласно вероятностному распределению на множестве целых неотрицательных чисел, известному обоим игрокам. Игрок 1 информирован о результате случайного хода, а игрок 2 – нет. Игрок 2 знает, что игрок 1 является инсайдером.

На каждом последующем шаге игроки одновременно предлагают свою цену за одну акцию. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Если игроки назвали одинаковые цены, то передачи акции не происходит. Предполагается, что игроки нейтральны к риску, т.е. для них полезность случайного дохода равна его математическому ожиданию. Таким образом, в рассматриваемой модели на каждом шаге сумма получаемых игроками полезностей равна нулю. Каждый игрок стремится максимизировать цену своего итогового портфеля (деньги плюс акции, оцениваемые по их ожидаемой ликвидной цене).

Такие многошаговые модели описываются повторяющимися играми с нулевой суммой и с неполной информацией у второго игрока. Подобные игры были впервые рассмотрены Р. Ауманом и М. Машлером в 1966 г. (Aumann, Maschler, 1995). Игра задается конечным множеством состояний игры. Каждому состоянию соответствует матричная игра (матрица одношаговых выигрышей игрока 1 или проигрышей игрока 2). Игроки повторно разыгрывают одну из матричных игр. Информационная структура та же, что и в описанной выше модели. Отказ от предположения о нейтральности игроков к риску привел бы к тому, что полученные игры не являлись бы играми с нулевой суммой.

Если число состояний игры конечно (в условиях исследуемой модели – конечное число возможных цен акции), повторяющаяся игра может быть развернута в матричную игру большого размера. Согласно теореме о минимаксе существует решение такой игры в рандомизированных стратегиях, что означает равенство гарантированных выигрышей обоих игроков $\max\min = \min\max = val$, где val называется *значением игры*, и наличие обеспечивающих значение игры *оптимальных рандомизированных стратегий*. В случае, когда число возможных цен акции бесконечно, но ликвидная цена имеет конечное математическое ожидание, соответствующая повторяющаяся игра может быть аппроксимирована играми с конечным числом состояний, что позволяет доказать существование решений для таких игр.

Информационное преимущество игрока 1 приводит к положительности значения игры. В связи с этим у читателя может возникнуть следующий вопрос, если игра заведомо несправедлива для второго игрока, то почему же он не отказывается от участия в ней.

Отметим, что значение игры, или, в другой терминологии, «цена», это и есть та справедливая компенсация, которую первый игрок должен заплатить второму за участие в игре. После выплаты такой компенсации значение игры становится равным нулю и оба игрока могут спокойно в ней участвовать. Но, чтобы знать компенсацию, игру нужно решить. В рассматриваемой нами модели выплата компенсации не предусмотрена.

Такая коллизия может рассматриваться как частный случай теоремы Милгрома–Стоки «о невозможности торговли» (Milgrom, Stokey, 1982). Эта теорема утверждает, что, если рынок находится в состоянии эффективного равновесия при отсутствии «фоновых участников рынка» (noise traders) или иных нерациональных воздействий на процесс ценообразования и если структуры, из которых участники рынка приобретают информацию, являются «общим знанием» (common knowledge), то, хотя некоторые участники рынка и могут обладать приватной информацией, никто из них не сможет извлечь из этого прибыль.

Предположения теоремы «о невозможности торговли» не вполне правдоподобны. В действительности некоторые агенты на финансовом рынке обязаны принимать участие в торгах: например биржевые маклеры (market makers). Для биржевого маклера единственным способом избежать торгов могла бы быть установка цен покупки и продажи с очень большой разницей. Однако обычно правила биржевой торговли задают границы для разницы цен покупки и продажи (bid-ask spread), преодолевая таким образом парадокс, порождаемый «теоремой о невозможности торговли».

В рассматриваемой нами упрощенной модели торгов на каждом шаге каждый игрок назначает одну ставку, которая является как ценой покупки, так и ценой продажи. Таким образом, разница цен покупки и продажи равна нулю, и у неинформированного игрока нет стратегической возможности отказа от торгов.

Игрок 1 (инсайдер) не заинтересован в немедленном обнаружении своей приватной информации, влекущем утрату стратегического преимущества. Это стремление инсайдера скрывать свою информацию понуждает его к стратегическому маневрированию, состоящему в рандомизации своих действий. Игрок 1 знает, какая именно игра разыгрывается, и его стратегия принимает во внимание эту информацию: на каждом шаге стратегия игрока 1 определяет условные вероятности своих действий в зависимости от состояния. Априорное вероятностное распределение вместе со стратегией игрока 1 порождают последовательность байесовских апостериорных вероятностных распределений состояний после каждого хода, соответствующую каждому из действий игрока 1, используемых на этом ходе.

Таким образом, инсайдер в многошаговой игре управляет случайной последовательностью апостериорных вероятностных распределений. В основе решения повторяющейся игры лежит нахождение оптимального управления этой случайной последовательностью.

Отметим, что с момента возникновения теории повторяющихся игр с неполной информацией у второго игрока решено в явном виде лишь небольшое число таких игр.

1.3. Предыдущие результаты по игровым моделям биржевых торгов

В работе (De Meyer, Saley, 2002) исследовались описанные выше модели биржевых торгов, в которых случайная ликвидная цена акции принимает два значения и игроки могут делать произвольные ставки. Таким образом, соответствующая повторяющаяся игра имеет континуум возможных действий игроков. Б. де Мейер и Х. Салей показывают, что последовательность значений игры (гарантированных выигрышей инсайдера) неограниченно растет при стремлении числа шагов n к бесконечности. Они получают асимптотику случайной последовательности цен сделок и показывают наличие в этой асимптотике винеровской компоненты.

В работах (Domansky, 2007; Доманский, Крепс, 2007) рассмотрен дискретный аналог модели многошаговых торгов с двумя возможными целочисленными ликвидными ценами акции – высокой m и низкой 0. Допустимы лишь целочисленные ставки (единица измерения равна денежной единице). Разумные ставки находятся в интервале между высокой и низкой ценами акции. Такая модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией с конечным множеством действий игроков. Выбранному случаем состоянию 0 или m (низкая или высокая цена акции) соответствует матрица размера $m \times m$ одношаговых выигрышей инсайдера. Игроки повторно разыгрывают одну из этих двух матричных игр.

В работе (Доманский, Крепс, 2007) доказана ограниченность значений повторяющихся игр, моделирующих такие торги с дискретными ставками, при числе шагов торгов n, стремящемся к бесконечности. Это кардинально отличает модель с дискретными допустимыми ставками от модели с произвольными допустимыми ставками.

Ограниченность значений повторяющихся игр позволяет корректно определить игры с бесконечным числом шагов, соответствующие торгам без заранее заданного ограничения продолжительности. В (Доманский, Крепс, 2007) в явном виде решены такие повторяющиеся игры с бесконечным числом шагов: получены значения игр и оптимальные стратегии как инсайдера, так и неинформированного игрока.

Описание оптимальной стратегии игрока 2. Не обладая информацией о цене акции, игрок 2 знает ее математическое ожидание, определяемое вероятностью высокой цены акции. На первом шаге своей оптимальной стратегии игрок 2 ставит наибольшее целое число, не превышающее ожидаемую цену акции. Затем на последующих шагах игры ставка игрока 2 зависит от пары сделанных ставок на предшествующем шаге (его собственной ставки и ставки инсайдера). Если на предыдущем шаге покупателем был инсайдер (ставка игрока 1 выше ставки игрока 2), то на текущем шаге игрок 2 увеличивает ставку на единицу, если же на предыдущем шаге покупателем был игрок 2 (ставка игрока 1 ниже ставки игрока 2), то на текущем шаге игрок 2 уменьшает ставку на единицу. Если на предыдущем шаге ставки игроков совпали, то на текущем шаге игрок 2 делает ту же ставку, что и на предыдущем.

Описание оптимальной стратегии игрока 1. Оптимальное управление игрока 1 случайной последовательностью апостериорных ожидаемых значений цены акции состоит в генерировании элементарного симметричного случайного блуждания ожидаемых цен акции по множеству допустимых ставок с поглощением в крайних точках – значениях двух возможных цен акции.

Пусть для определенности априорное математическое ожидание цены акции равно целому числу k между высокой и низкой ценами акции, т.е. вероятность состояния m равна k/m. На первом шаге своей оптимальной стратегии игрок 1 использует только ставки k и $k-1$. Условные вероятности этих действий в зависимости от состояния игры устроены таким образом, чтобы их полные вероятности оказались равны $1/2$, апостериорная ожидаемая цена акции, соответствующая действию $k-1$, была равна $k-1$, а цена, соответствующая действию k, была равна $k+1$.

Далее, если ожидаемая цена акции после первого шага стала равной $k-1$, то после второго шага игрок 1 делает ее равной $k-2$ или k с вероятностями $1/2$. Если же ожидаемая цена после первого шага стала равной $k+1$, то после второго шага он делает ее равной k или $k+2$.

В частности, если ожидаемая цена акции равна единице, то игрок 1 использует только ставки 0 и 1, причем ставка 0 назначается только в состоянии 0. Таким образом, после наблюдения ставки 0 игрока 1 игрок 2 достоверно узнает, что истинной ценой акции является нуль, и игра завершается.

Аналогично, если ожидаемая цена акции равна $(m-1)$, то игрок 1 назначает только ставки $(m-2)$ и $(m-1)$, причем ставка $(m-1)$ используется только в состоянии m. Таким образом, после наблюдения ставки $(m-1)$ игрока 1 игрок 2 достоверно узнает, что истинная цена акции равна m , и игра завершается.

Мы говорим об этих двух моментах как о моментах поглощения случайного блуждания ожидаемых цен акции.

В отличие от торгов с произвольными допустимыми ставками торги с дискретными допустимыми ставками завершаются с вероятностью единица за конечное число шагов, причем ожидаемое число шагов до завершения торгов также конечно.

Отметим, что этот математически полученный вывод интуитивно понятен – в игре с дискретными ставками инсайдер имеет меньше возможностей для манипулирования.

Момент поглощения представляет собой момент обнаружения игроком 2 «истинной» цены акции и потери информационного преимущества инсайдера, т.е., в сущности, момент окончания торгов.

При оптимальном управлении инсайдера цены состоявшихся сделок воспроизводят случайное блуждание ожидаемых цен акции.

Отметим, что описанные выше оптимальные стратегии игроков 1 и 2 в игре неограниченной продолжительности не являются оптимальными, когда число шагов игры торга фиксировано (Крепс, 2009), хотя и близки к таковым при большом числе шагов игры.

1.4. Результаты данной работы

В настоящей работе исследуются модели многошаговых торгов, в которых случайная ликвидная цена акции может принимать произвольное неотрицательное целочисленное значение. Это значение выбирается перед началом игры случайным ходом согласно вероятностному распределению $\mathbf{p}$ на множестве $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел. Допустимы произвольные неотрицательные целочисленные ставки.

Если носитель распределения $\mathbf{p}$ конечен (число возможных цен акции конечно), то значение игры $G_n(\mathbf{p})$ всегда существует, так как такая игра задается конечным числом конечных матриц одношаговых выигрышей игрока 1. Ставки, превышающие максимальную возможную цену акции, неэффективны и могут быть исключены из рассмотрения. Однако в общем случае существование значения игры $G_n(\mathbf{p})$ не следует из общей теории.

Мы устанавливаем, что если случайная ликвидная цена акции имеет конечное математическое ожидание, то значения $V_n(\mathbf{p})$ n-шаговых игр $G_n(\mathbf{p})$ существуют в общем случае.

Далее будет доказано, что если дисперсия случайной цены акции конечна, то при $n \to \infty$ последовательность значений $V_n(\mathbf{p})$ игр $G_n(\mathbf{p})$ ограничена сверху и не превышает половины дисперсии. Таким образом, при конечной дисперсии цены акции, как и в описанном выше частном случае двух возможных цен акции, ограниченность значений $V_n(\mathbf{p})$ позволяет корректно определить игры $G_\infty(\mathbf{p})$ с бесконечным числом шагов, описывающие торги не ограниченной изначально продолжительности.

На базе построенных в (Доманский, Крепс, 2007) решений игр неограниченной продолжительности для случая двух возможных цен акции мы получаем решения игр $G_\infty(\mathbf{p})$ для общего случая. Для того чтобы сконструировать решение игры $G_\infty(\mathbf{p})$, мы «каноническим» образом представляем распределение $\mathbf{p}$ с заданным математическим ожиданием в виде выпуклой комбинации имеющих то же ожидание распределений с двухточечными носителями и вырожденного распределения с одноточечным носителем, равным этому математическому ожиданию.

С помощью этого представления мы конструируем оптимальную стратегию игрока 1 (инсайдера) в игре $G_\infty(\mathbf{p})$ с произвольным распределением $\mathbf{p}$, как выпуклую комбинацию его оптимальных стратегий в играх с распределениями, имеющими двухточечный носитель, в выпуклую комбинацию которых раскладывается распределение $\mathbf{p}$. При случайном выборе состояния, равного математическому ожиданию цены акции, так как ожидаемый выигрыш игрока 1 равен нулю, игрок 1 останавливает игру ввиду бессмысленности ее продолжения.

Построенная таким образом оптимальная стратегия инсайдера порождает симметричное случайное блуждание апостериорных математических ожиданий цены акции по множеству целых неотрицательных чисел с поглощением, которое происходит в тот момент, когда апостериорное математическое ожидание цены акции становится равным истинной ликвидной цене акции. Это может случиться на первом же шаге, если случайно выбранная ликвидная цена совпадет с ее же математическим ожиданием. Ожидаемая продолжительность этого случайного блуждания до поглощения равна дисперсии ликвидной цены акции.

Значение бесконечно повторяющейся игры $G_\infty(\mathbf{p})$ равно ожидаемой продолжительности случайного блуждания, умноженной на постоянный одношаговый выигрыш инсайдера, равный $1/2$.

В заключение будет установлено, что случайная последовательность цен состоявшихся сделок воспроизводит случайное блуждание ожидаемых цен акции.

Таким образом, результаты, полученные для модели более реалистичной, чем модели, изученные в работах (De Meyer, Saley, 2002; Доманский, Крепс, 2007), подтверждают гипотезу о том, что случайные флуктуации цен на фондовых рынках могут являться следствием маскировочных действий инсайдера в условиях асимметричной информированности агентов.

Основные результаты данной статьи отражены в (Domansky, Kreps, 2009).

2. Стратегии игроков в игре с неполной информацией, моделирующей многошаговые торги

Рассмотрим повторяющиеся игры $G_n(\mathbf{p})$ с неполной информацией, моделирующие описанные во введении многошаговые торги. Два игрока с противоположными интересами имеют деньги и акции одного вида. Случайная ликвидная цена акции $C_\mathbf{p}$ может принимать произвольные неотрицательные целочисленные значения $s \in S = Z_+ = \{0, 1, \ldots\}$.

На нулевом шаге случайный ход определяет ликвидную цену акции на весь период торгов согласно вероятностному распределению $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots)$ на S, известному обоим игрокам. Игрок 1 информируется о результате случайного хода s, игрок 2 – нет. Игрок 2 знает, что игрок 1 является инсайдером.

На каждом последующем шаге $t = 1, \ldots, n$ игроки одновременно предлагают свою цену за одну акцию, $i_t \in I = Z_+$ для игрока 1 и $j_t \in J = Z_+$ для игрока 2. Пара (i_t, j_t) объявляется обоим игрокам перед переходом к следующему шагу. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Таким образом, если $i_t > j_t$, игрок 1 получает от игрока 2 одну акцию, игрок 2 получает от игрока 1 сумму денег i_t. Если $i_t < j_t$, игрок 2 получает акцию от игрока 1, игрок 2 платит игроку 1 сумму j_t. Если $i_t = j_t$, то передачи акции не происходит. Каждый игрок стремится максимизировать цену своего итогового портфеля (деньги плюс ликвидная цена акций).

Такая n-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой $G_n(\mathbf{p})$ с неполной информацией у второго игрока со счетным множеством состояний $S = Z_+$ и счетным множеством действий игроков $I = Z_+$ для игрока 1 и $J = Z_+$ для игрока 2. В таких играх игроки разыгрывают матричную игру n раз. Матрица выигрышей выбирается случайно из счетного множества бесконечных матриц в соответствии с заданным распределением $\mathbf{p}$. Первый игрок знает истинную матрицу выигрышей, а второй игрок знает лишь априорное распределение $\mathbf{p}$. После каждого шага оба игрока узнают ход противника. В конце серии игр игрок 2 платит игроку 1 сумму выигрышей за весь период игры.

Одношаговые выигрыши игрока 1 задаются матрицами $A^s = [a^s(i,j)]_{i\in I, j\in J}$, $s \in S$,

$$a^s(i,j) = \begin{cases} j - s, & \text{если } i < j; \\ 0, & \text{если } i = j; \\ -i + s, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

В конце игр игрок 2 платит игроку 1 сумму $\sum_{t=1}^{n} a^s(i_t, j_t)$, где s – состояние, выбранное случаем на нулевом шаге. Описание игры известно обоим игрокам.

На шаге t обоим игрокам достаточно принять в расчет лишь последовательность $(i_1, \ldots, i_{t-1})$ предыдущих действий игрока 1 (см. (Mertens, Sorin, Zamir, 1994)). Таким образом, стратегия σ информированного игрока 1 задается последовательностью ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_t, \ldots)$.

Ход $\sigma_t(\cdot \mid s, i_1, \ldots, i_{t-1}) \in \Delta(I)$ представляет собой условное вероятностное распределение на множестве допустимых ставок, используемое игроком 1 для выбора его действия на шаге t в состоянии s при предшествующих наблюдениях $i_1, \ldots, i_{t-1}$. Здесь $\Delta(\cdot)$ – множество вероятностных распределений на $(\cdot)$.

Стратегия τ неинформированного игрока 2 представляет собой последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_t, \ldots)$, где $\tau_t(\cdot \mid i_1, \ldots, i_{t-1}) \in \Delta(J)$.

Заметим, что здесь мы определяем бесконечную стратегию, пригодную для игр любой продолжительности. Пара стратегий (σ, τ)

порождает условное вероятностное распределение $\Pi_{(\sigma,\tau)}(\cdot\,|\,s)$ на множестве $(I\times J)^{\infty}$. Функция выигрыша игры $G_n(\mathbf{p})$: $K_n(\mathbf{p},\sigma,\tau)=\sum_{s\in S}p_s h_n^s(\sigma,\tau)$, где $h_n^s(\sigma,\tau)=\mathbf{E}_{(\sigma,\tau)}[\sum_{t=1}^{n}a^s(i_t,j_t)\,|\,s]$ является компонентой n-шагового вектора выигрышей $h_n(\sigma,\tau)$ для пары стратегий (σ,τ). Математическое ожидание берется относительно вероятностного распределения $\Pi_{(\sigma,\tau)}(\cdot\,|\,s)$.

Для начальной вероятности $\mathbf{p}$ стратегия σ обеспечивает n-шаговый выигрыш $w_n(\mathbf{p},\sigma)=\inf_{\tau}K_n(\mathbf{p},\sigma,\tau)$.

Стратегия τ обеспечивает n-шаговый векторный выигрыш $\mathbf{h}_n(\tau)$ с компонентами $h_n^s(\tau)=\sup_{\sigma(s)}h_n^s(\sigma(s),\tau)$.

Далее опишем рекурсивную структуру игр $G_{n+1}(\mathbf{p})$. Стратегия σ может рассматриваться как пара $(\sigma_1,(\sigma(i))_{i\in I})$, где $\sigma_1(i\,|\,s)$ – условная вероятность на I, зависящая от s; $\sigma(i)$ – продолжающая стратегия, зависящая от реализации первого случайного хода $i_1=i$.

Аналогично, стратегия τ может рассматриваться как пара $(\tau_1,(\tau(i))_{i\in I})$, где τ_1 – вероятность на J.

Пара $(\mathbf{p},\sigma_1)$ порождает вероятностное распределение π на $S\times I$, $\pi(s,i)=p(s)\sigma_1(i\,|\,s)$. Пусть $\mathbf{q}\in\Delta(I)$, $q_i=\sum_{S}p_s\sigma_1(i\,|\,s)$, – маргинальное распределение вероятностей π на I (полные вероятности действий), и пусть $\mathbf{p}(i)\in\Delta(S)$, где $p_s(i)=p_s\sigma_1(i\,|\,s)/q_i$, – условная вероятность на S при заданном $i_1=i$ (апостериорная вероятность).

Любой набор полных вероятностей действий $\mathbf{q}\in\Delta(I)$ и апостериорных вероятностей $(\mathbf{p}(i)\in\Delta(S))_{i\in I}$, удовлетворяющих равенству $\sum_{i\in I}q_i\mathbf{p}(i)=\mathbf{p}$, определяет некоторый первый ход игрока 1 для текущей вероятности $\mathbf{p}$. Апостериорные вероятности содержат всю существенную для игрока 1 информацию о предыстории игры. Таким образом, для определения стратегии игрока 1 достаточно определить первый ход игрока 1 для любой текущей апостериорной вероятности.

Следующее рекурсивное представление функции выигрышей соответствует рекурсивным представлениям стратегий:

$$K_{n+1}(\mathbf{p},\sigma,\tau)=K_1(\mathbf{p},\sigma_1,\tau_1)+\sum_{i\in I}q_iK_n(\mathbf{p}(i),\sigma(i),\tau(i)).$$

Пусть для всех $i \in I$ стратегия $\sigma(i)$ обеспечивает выигрыш $w_n(\mathbf{p}(i), \sigma(i))$ в игре $G_n(\mathbf{p}(i))$. Тогда стратегия $\sigma = (\sigma_1, (\sigma(i))_{i\in I})$ гарантирует выигрыш

$$w_{n+1}(\mathbf{p}, \sigma) = \min_{j\in J} \sum_{i\in I} \left[\sum_{s\in S} p_s \sigma_1(i \mid s) a(s,i,j) + q_i w_n(\mathbf{p}(i), \sigma(i)) \right]. \qquad (1)$$

Пусть для всех $i \in I$ стратегия $\tau(i)$ обеспечивает векторный выигрыш $\mathbf{h}_n(\tau(i))$. Тогда стратегия $\tau = (\tau_1, (\tau(i))_{i\in I})$ гарантирует векторный выигрыш $\mathbf{h}_{n+1}(\tau)$ с компонентами

$$h^s_{n+1}(\tau) = \max_{i\in I} \sum_{j\in J} \tau_1(j)(a(s,i,j) + h^s_n(\tau(i)) \quad \forall s \in S. \qquad (2)$$

Игра $G_n(\mathbf{p})$ имеет значение $V_n(\mathbf{p})$, если $\inf_\tau \sup_\sigma K_n(\mathbf{p}, \sigma, \tau) = \sup_\sigma \inf_\tau K_n(\mathbf{p}, \sigma, \tau) = V_n(\mathbf{p})$. Оптимальные стратегии игроков σ^* и τ^* существуют, если $V_n(\mathbf{p}) = \inf_\tau K_n(\mathbf{p}, \sigma^*, \tau) = \sup_\sigma K_n(\mathbf{p}, \sigma, \tau^*)$, или в приведенных выше обозначениях $V_n(\mathbf{p}) = w_n(\mathbf{p}, \sigma^*) = \sum_{s\in S} p_s h^s_n(\tau^*)$.

Для вероятностных распределений $\mathbf{p}$ с конечным носителем игры $G_n(\mathbf{p})$ являются играми с конечными пространствами состояний и действий. Следовательно, в таких играх существуют значения $V_n(\mathbf{p})$ и оба игрока имеют оптимальные стратегии σ^* и τ^*.

Функции V_n непрерывны и вогнуты по $\mathbf{p}$.

Рассмотрим множество M^1 вероятностных распределений $\mathbf{p}$ с конечным первым моментом $m^1[p] = \sum_{s=0}^{\infty} s p_s$. Для $\mathbf{p} \in M^1$ случайная величина $C_\mathbf{p}$, определяющая ликвидную цену акции, имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{E}[\mathbf{p}] = m^1[\mathbf{p}]$. Множество M^1 является выпуклым подмножеством банахова пространства $L^1(\{s\})$ последовательностей $\mathbf{l} = (l_s)$ с нормой $\|\mathbf{l}\|^1_{\{s\}} = \sum_{s=0}^{\infty} s \mid l_s \mid$.

Пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in M^1$. Тогда для «разумных» стратегий σ и τ

$$| K_n(\mathbf{p}_1, \sigma, \tau) - K_n(\mathbf{p}_2, \sigma, \tau) | < n \| \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 \|^1_{\{s\}}.$$

Следовательно, выигрыш в игре $G_n(\mathbf{p})$ с $\mathbf{p} \in M^1$ может быть приближен выигрышами в играх $G_n(\mathbf{p}_k)$ с вероятностным распределением $\mathbf{p}_k$, имеющим конечный носитель. Из этого факта непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 1. *Если случайная величина* $C_{\mathbf{p}}$ *имеет конечное математическое ожидание, то существует значение* $V_n(\mathbf{p})$ n*-шаговой игры* $G_n(\mathbf{p})$. *Значения* $V_n(\mathbf{p})$ *положительны и не убывают с возрастанием числа шагов.*

Замечание 1. Если случайная величина $C_{\mathbf{p}}$ не принадлежит L^2, то при n, стремящемся к ∞, последовательность $V_n(\mathbf{p})$ расходится.

3. Верхняя граница значений $V_n(p)$

Рассмотрим множество M^2 вероятностных распределений $\mathbf{p}$ с конечным вторым моментом $m^2[\mathbf{p}] = \sum_{s=0}^{\infty} s^2 p_s < \infty$. Для $\mathbf{p} \in M^2$ случайная величина $C_{\mathbf{p}}$, определяющая ликвидную цену акции, принадлежит L^2 и имеет конечную дисперсию $\mathbf{D}[C_{\mathbf{p}}] = m^2[\mathbf{p}] - (m^1[\mathbf{p}])^2$.

Множество M^2 является замкнутым выпуклым подмножеством банахова пространства $L^1(\{s^2\})$ отображений $\mathbf{l}: Z_+ \to R$ с нормой $\|\mathbf{l}\|^1_{\{s^2\}} = \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l_s|$.

Основной результат этого раздела состоит в том, что при $\mathbf{p} \in M^2$ последовательность $V_n(\mathbf{p})$ остается ограниченной при $n \to \infty$. Для доказательства этого факта определим множество «разумных» стратегий τ^m, $m = 0,1,\ldots$ игрока 2, обеспечивающих соответствующие границы для игры $G_n(\mathbf{p})$ при произвольном n.

Определение 1. Определим рекурсивно стратегии игрока 2 $\tau^m = (\tau_1^m, (\tau^m(i))_{i \in I})$, $m = 0,1,\ldots$, соотношениями:

а) первый ход τ_1^m – действие (ставка) $m \in J$;

б) последующие ходы τ_t^m при $t > 1$ зависят лишь от последней наблюдаемой пары действий (i_{t-1}, j_{t-1}):

$$\tau_t^m(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & \text{если } i_{t-1} < j_{t-1}; \\ j_{t-1}, & \text{если } i_{t-1} = j_{t-1}; \\ j_{t-1} + 1, & \text{если } i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

Замечание 2. Определение стратегий τ^m включает предыдущие действия обоих игроков. Однако эти стратегии могут быть реализованы на основе предыдущих действий только игрока 1.

Предложение 1. *Стратегия* τ^m *обеспечивает векторные выигрыши* $\mathbf{h}_n(\tau^m) \in R_+^S$ *с компонентами, задаваемыми равенствами*

$$h_n^s(\tau^m) = \sum_{l=0}^{n-1} (m-s-l)^+, \tag{3}$$

при $s \le m$,

$$h_n^s(\tau^m) = \sum_{l=0}^{n-1} (s-m-1-l)^+, \tag{4}$$

при $s > m$, *где* $(a)^+ := \max\{0, a\}$.

Теорема 2. *Для* $\mathbf{p} \in M^2$ *значения* $V_n(\mathbf{p})$ *ограничены сверху непрерывной кусочно-линейной вогнутой функцией* $H(\mathbf{p})$ *на* M^2. *Ее области линейности* $L(k) = \{\mathbf{p} : \mathbf{E}[\mathbf{p}] \in [k, k+1]\}$, $k = 0,1,\ldots,$ *а области недифференцируемости* $\Theta(k) = \{\mathbf{p} : \mathbf{E}[\mathbf{p}] = k\}$.

Справедливо равенство:

$$H(\mathbf{p}) = (\mathbf{D}[\mathbf{p}] - \alpha(\mathbf{p})(1-\alpha(\mathbf{p}))) / 2, \tag{5}$$

где $\alpha(\mathbf{p}) = \mathbf{E}[\mathbf{p}] - ent[\mathbf{E}[\mathbf{p}]]$ *и* $ent[x]$, $x \in R^1$ *− целая часть числа* x.

Следствие 1. *Стратегии* τ^m, $m = 0,1,\ldots,$ *обеспечивают ту же верхнюю границу* $H(\mathbf{p})$ *для верхнего значения бесконечной игры* $G_\infty(\mathbf{p})$.

4. Структура множеств $\Theta(r)$ и линейных функций на них

Множества $\Theta(r)$, $r = 1,2,\ldots$, являются замкнутыми выпуклыми подмножествами банахова пространства $L^1(\{s^2\})$. В этом разделе мы даем представление множества $\Theta(r)$ как выпуклой оболочки своих крайних точек, а также соответствующее этому представлению разложение линейных функций на этом множестве.

Крайними точками множества $\Theta(r)$ являются распределения $\mathbf{p}^r(k,l) \in \Theta(r)$ с одноточечными и двухточечными носителями $\{r-l, r+k\}$:

$$p_{r-l}^r(k,l) = \frac{k}{k+l}, \quad p_{r+k}^r(k,l) = \frac{l}{k+l}, \tag{6}$$

$k = 0,1,\ldots$, $l = 0,\ldots,r$, $k+l > 0$. Заметим, что для любых k и l имеет место равенство $\mathbf{p}^r(0,l) = \mathbf{p}^r(k,0) = \mathbf{e}^r$, где $\mathbf{e}^r$ − вырожденное распределение с одноточечным носителем $e_r^r = 1$.

Предложение 2. *Любое распределение* $\mathbf{p} \in \Theta(r)$ *имеет следующее представление в виде выпуклой комбинации крайних точек (6) множества* $\Theta(r)$:

$$\mathbf{p} = p_r \mathbf{e}^r + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p})\mathbf{p}^r(k,l) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p})\mathbf{p}^r(k,l) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p})\mathbf{p}^r(k,l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p})\mathbf{p}^r(k,l)$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kl}(\mathbf{p}) = (k+l)\, p_{r-l} p_{r+k} \Big/ \sum_{t=1}^{r} t p_{r-t}. \tag{7}$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением.

Следствие 2. *Любая непрерывная линейная функция* f *на множестве* $\Theta(r)$ *имеет следующее представление в виде выпуклой комбинации ее значений в крайних точках*

$$f(\mathbf{p}) = p_r f(\mathbf{e}^r) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}^r(k,l)) \tag{8}$$

с коэффициентами $\alpha_{kl}(\mathbf{p})$, *задаваемыми формулой (7).*

В частности, непрерывная линейная на $\Theta(r)$ и равная нулю в $\mathbf{e}^r$ функция $\mathbf{D}$, представляющая собой дисперсию случайной цены акции $C_{\mathbf{p}}$, имеет следующее представление в виде выпуклой комбинации значений в крайних точках $\mathbf{D}[\mathbf{p}^r(k,l)] = k\,l$, соответствующее разложению (7):

$$\mathbf{D}[\mathbf{p}] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r} \frac{k+l}{\sum_{t=1}^{r} t p_{r-t}} p_{r-l} p_{r+k} k\, l.$$

Таким образом, мы получаем следующее представление для функций $H(\mathbf{p})$ на $\Theta(r)$.

$$H(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r} \frac{k+l}{\sum_{t=1}^{r} t p_{r-t}} p_{r-l} p_{r+k} k\, l/2.$$

Заметим, что существуют «канонические» представления крайних точек $\mathbf{p}^r(k,l)$ с $k,l > 0$, которые генерируют «квазиоптимальные» стратегии игрока 1 для игр $G_n(\mathbf{p}^r(k,l))$:

$$\mathbf{p}^r(k,l) = \left[\mathbf{p}^{r+1}(k-1,l+1) + \mathbf{p}^{r-1}(k+1,l-1)\right]/2.$$

Эти «канонические» разложения могут быть распространены на все множество $\Theta(r)$ с помощью формулы $\mathbf{p} = p_r\, \mathbf{e}^r + (1-p_r)\mathbf{p}^- /2 + {}$ $+(1-p_r)\mathbf{p}^+ /2$, где

$$\mathbf{p}^- = \frac{1}{1-p_r} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p})\mathbf{p}^{r-1}(k+1,l-1) \in \Theta(r-1),$$

$$\mathbf{p}^+ = \frac{1}{1-p_r} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p})\mathbf{p}^{r+1}(k-1,l+1) \in \Theta(r+1),$$

или покомпонентно

$$p_s^- = \begin{cases} p_s \sum_{j=0}^{r-1}(r-1-j)p_j \Big/ \left[\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j\right], & \text{если } s > r; \\ 0, & \text{если } s = r; \\ p_s \sum_{j=r+1}^{\infty}(j-r+1)p_j \Big/ \left[\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j\right], & \text{если } s < r, \end{cases} \tag{9}$$

$$p_s^+ = \begin{cases} p_s \sum_{j=0}^{r-1}(r+1-j)p_j \Big/ \left(\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j\right), & \text{если } s > r; \\ 0, & \text{если } s = r; \\ p_s \sum_{j=r+1}^{\infty}(j-r-1)p_j \Big/ \left(\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j\right), & \text{если } s < r. \end{cases} \tag{10}$$

В следующем разделе мы покажем, что эти «канонические» разложения также генерируют «квазиоптимальные» стратегии игрока 1 для общих игр $G_n(\mathbf{p})$.

Далее, используя представление (8), построим последовательность непрерывных кусочно-линейных функций B_n на множестве M^2 той же формы, что и функция H: с областями линейности $L(r)$ и с областями негладкости $\Theta(r)$. Такие функции полностью определяются своими значениями на множестве $\cup_{r=1}^{\infty}\Theta(r)$. Заметим, что функции $B_n(\mathbf{p})$ являются непрерывными и линейными функциями на каждом множестве $\Theta(r)$, $r = 1, 2, \ldots$

Определение 2. Для распределений $\mathbf{p}^r(k,l)$, задаваемых формулами (6), значения $B_n(\mathbf{p}^r(k,l))$ определяются рекуррентными соотношениями

$$B_n(\mathbf{p}^r(k,l)) = [1 + B_{n-1}(\mathbf{p}^{r+1}(k-1,l+1)) + B_{n-1}(\mathbf{p}^{r-1}(k+1,l-1))]/2, \tag{11}$$

при граничных условиях

$$B_{n-1}(\mathbf{p}^{r+k}(0,l+k)) = B_{n-1}(\mathbf{p}^{r-l}(k+l,0)) = 0$$

и начальном условии $B_0(\mathbf{p}^r(k,l)) = 0$. Для внутренних точек $\mathrm{p} \in \Theta(r)$ значения $B_n(\mathbf{p})$ – выпуклые комбинации своих значений в крайних точках

$$B_n(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r}\frac{k+l}{\sum_{t=1}^{r} t p_{r-t}} p_{r-l} p_{r+k} B_n(\mathbf{p}^r(k,l)).$$

В следующем разделе будет показано, что функции B_n представляют собой нижние границы для значений $V_n(\mathbf{p})$ на M^2. Эти функции являются выигрышем игрока 1 при применении им «квазиоптимальной» стратегии.

5. Асимптотика значений $V_n(p)$

В этом разделе для $\mathbf{p} \in M^2$ мы покажем, что при $n \to \infty$ последовательность значений $V_n(\mathbf{p})$ игр $G_n(\mathbf{p})$ сходится к $H(\mathbf{p})$. Чтобы доказать этот факт, мы конструируем стратегию $\sigma^{\mathbf{p}}$ игрока 1, обеспечивающую нижние границы $B_n(\mathbf{p})$ в игре $G_n(\mathbf{p})$. Затем установим, что для любого $\mathbf{p} \in M^2$ последовательность $B_n(\mathbf{p})$ сходится к $H(\mathbf{p})$.

Стратегия $\sigma^{\mathbf{p}}$ является стационарной (не зависит от номера шага). Такие стратегии задаются их первым ходом для любого $\mathbf{p} \in M^2$.

Определение 3. Пусть $\mathbf{p} \in \Theta(r)$. Определим рекурсивно стратегии $\sigma^{\mathbf{p}}$ игрока 1.

А. Если реализуется состояние $s = r$, то стратегия $\sigma^{\mathbf{p}}$ прекращает игру.

Б. В противном случае ($s \neq r$) первый ход стратегии $\sigma^{\mathbf{p}}$ использует только две ставки $r-1$ и r с вероятностями

$$\sigma_1^p(r-1\,|\,s) = \begin{cases} 0,5\sum_{j=0}^{r-1}(r-j-1)p_j \,/ \sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j, \text{ если } s > r; \\ 0,5\sum_{j=r+1}^{\infty}(j-r+1)p_j \,/ \sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j, \text{ если } s < r; \end{cases}$$

$$\sigma_1^p(r\,|\,s) = \begin{cases} 0,5\sum_{j=0}^{r-1}(r-j+1)p_j \,/ \sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j, \text{если } s > r; \\ 0,5\sum_{j=r+1}^{\infty}(j-r-1)p_j \,/ \sum_{j=0}^{r-1}(r-j)p_j, \text{если } s < r. \end{cases}$$

Таким образом, ставки $r-1$ и r выбираются с одинаковыми полными вероятностями $q_{r-1} = q_r = (1-p_r)/2$. Вероятность остановки игры равна p_r.

В. Далее продолжение стратегии $\sigma^{\mathbf{p}}$ выбирается в соответствии с апостериорными вероятностными распределениями $\mathbf{p}(\cdot\,|\,r-1)$ и $\mathbf{p}(\cdot\,|\,r)$ для действий $r-1$ и r, соответственно

$$\mathbf{p}(\cdot\,|\,r-1) = \mathbf{p}^- \in \Theta(r-1), \quad \mathbf{p}(\cdot\,|\,r) = \mathbf{p}^+ \in \Theta(r+1),$$

где $\mathbf{p}^-$ и $\mathbf{p}^+$ задаются с помощью (9) и (10).

Для внутренних точек $\mathrm{p} \in L(r)$ с $\mathbf{E}[\mathbf{p}] = r + \alpha$, первые ходы стратегий $\sigma^{\mathbf{p}}$ – выпуклые комбинации первых ходов для граничных точек $\mathrm{p}^{\mathrm{r}} \in \Theta(r)$ и $\mathrm{p}^{\mathrm{r+1}} \in \Theta(r+1)$, так что $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}^{r+1} + (1-\alpha)\mathbf{p}^{r}$.

Замечание 3. Для $\mathbf{p} \in \Theta(r)$ из теоремы 2 следует, что если случайная величина $C_{\mathbf{p}}$ принимает значение r, то выигрыш игрока 1 равен нулю и он может остановить игру, ничего не потеряв.

Предложение 3. *Для* $\mathbf{p} \in \cup_{r=1}^{\infty}\Theta(r)$ *стратегия* $\sigma^{\mathbf{p}}$ *гарантирует выигрыш* $w_n(\mathbf{p}, \sigma^{\mathbf{p}}) = B_n(\mathbf{p})$ *в игре* $G_n(\mathbf{p})$.

Теорема 3. *Для* $\mathbf{p} \in M^2$ *имеет место* $\lim\limits_{n\to\infty} V_n(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 и предложению 2.

Следствие 2. *Из доказательства следует, что стратегия* $\sigma^{\mathbf{p}}$ *гарантирует выигрыш* $H(\mathbf{p})$ *в бесконечно повторяющейся игре* $G_\infty(\mathbf{p})$.

Заметим, что стратегия $\sigma^{\mathbf{p}}$ не является оптимальной ни в какой конечной игре $G_n(\mathbf{p})$ с $n < \infty$.

6. Решения для игр $G_\infty(p)$ и случайные блуждания

Так как при $\mathbf{p} \in M^2$ значения конечно-шаговых игр $V_n(\mathbf{p})$ ограничены сверху, становится осмысленным рассмотрение игр $G_\infty(\mathbf{p})$ с бесконечным числом шагов.

В этих играх мы ограничиваем множество допустимых стратегий игрока 1 множеством Σ^+ стратегий, использующих лишь ходы, обеспечивающие ему неотрицательные одношаговые выигрыши против любого действия игрока 2. Поэтому функции выигрышей $K_\infty(\mathbf{p}, \sigma, \tau)$ в играх $G_\infty(\mathbf{p})$ становятся полностью определенными (возможно, бесконечными).

Докажем, что игра $G_\infty(\mathbf{p})$ с бесконечным числом шагов имеет значение и это значение равно $H(\mathbf{p})$. (Существование значений для этих игр не следует из общих рассмотрений и нуждается в доказательстве. Мы устанавливаем его, приводя в явном виде оптимальные стратегии игроков.)

Теорема 4. *При* $\mathbf{p} \in M^2$ *значение* $V_\infty(\mathbf{p})$ *игры* $G_\infty(\mathbf{p})$ *существует и равно* $H(\mathbf{p})$. *Оба игрока имеют оптимальные стратегии.*

Для $\mathbf{p} \in \Theta(r)$, $r = 1, 2, \ldots$ *оптимальной стратегией игрока 1 является стратегия* $\sigma(\mathbf{p})$, *заданная в определении 3.*

При $\mathbf{p} \in L(r)$, $r = 0, 1\ldots$, *оптимальной стратегии игрока 2 является стратегия* τ^r, *заданная в определении 1. Для* $\mathbf{p} \in \Theta(r)$, $r = 1, 2, \ldots$, *оптимальна любая выпуклая комбинация стратегий* τ^{r-1} *и* τ^r.

Рассмотрим случайную последовательность $(\mathbf{p}_t)_{t=1}^\infty$ апостериорных вероятностных распределений, порожденных оптимальной стратегией $\sigma^{\mathbf{p}}$ игрока 1.

Для начального вероятностного распределения с целым математическим ожиданием $\mathbf{p} \in \Theta(r)$, $r = 1, 2, \ldots$, эта случайная последовательность представляет собой цепь Маркова с пространством состояний $\cup_{l=0}^\infty \Theta(l)$ и с переходными вероятностями $\Pr(\mathbf{p}, \mathbf{e}^l) = p_l$; $\Pr(\mathbf{p}, \mathbf{p}^-) = \Pr(\mathbf{p}, \mathbf{p}^+) = (1 - p_l)/2$, где $\mathbf{p}^-$ и $\mathbf{p}^+$ заданы формулами (9) и (10).

Цепь Маркова $(\mathbf{p}_t)_{t=1}^{\infty}$ может интерпретироваться как симметричное случайное блуждание по областям $\Theta(l)$ с поглощением. Вероятности скачков на каждую из соседних областей $\Theta(l-1)$ или $\Theta(l+1)$ равны $(1-p_l)/2$.

Возникающие апостериорные вероятностные распределения $\mathbf{p}^-$ и $\mathbf{p}^+$ имеют нулевую компоненту l, и, таким образом, при каждом последующем попадании в область $\Theta(l)$ вероятность поглощения в ней оказывается равной нулю.

Для случайного блуждания $(\mathbf{p}_t)_{t=1}^{\infty}$ с начальным вероятностным распределением $\mathbf{p}\in\Theta(r)$, $r=1,2,\dots$, обозначим через $\theta(\mathbf{p})$ марковский момент поглощения: $\theta(\mathbf{p})=\min\{t \, : \, \mathbf{p}_t=\mathbf{e}^l\}-1$.

Марковский момент $\theta(\mathbf{p})$ представляет собой момент выявления игроком 2 «истинной» цены акции и, по сути дела, момент окончания торгов.

Предложение 4. *Для случайного блуждания* $(\mathbf{p}_t)_{t=1}^{\infty}$ *с начальным вероятностным распределением* $\mathbf{p}\in\Theta(r)$ *его ожидаемая продолжительность до поглощения* $\mathbf{E}[\theta(\mathbf{p})]$ *равна дисперсии ликвидной цены акции* $\mathbf{D}[\mathbf{p}]$.

Далее мы рассмотрим случайную последовательность $c_t(\mathbf{p}_{t-1})$, $t=1,2,\dots$, образованную ценами состоявшихся сделок $c_t=\max\{i_t, j_t\}$ на последовательных шагах игры $G_\infty(\mathbf{p})$ с бесконечным числом шагов. Напомним, что сделка на шаге t совершается, если на этом шаге не происходит поглощения и ставки игроков не совпадают $i_t\neq j_t$.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда начальное вероятностное распределение имеет целочисленное математическое ожидание, $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0\in\Theta(r)$. В этом случае на каждом шаге t математическое ожидание апостериорного распределения $\mathbf{p}_t$, $t=1,2,\dots$, останется целочисленным.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{p}_{t-1}\in\Theta(l)$, *тогда:*

а) вероятность того, что сделка происходит на шаге t, *равна* $(1-p_{t-1}(l))/2$;

б) $c_t(\mathbf{p}_{t-1})=l$, *т.е. цена состоявшейся на шаге* t *сделки равна* l;

в) ожидаемый одношаговый выигрыш игрока 1 равен $1/2$.

Таким образом, цены состоявшихся сделок $c_t(\mathbf{p}_{t-1})$, $t=1,2,\dots$, повторяют симметричное случайное блуждание ожидаемых цен акции, что подтверждает гипотезу об эндогенном происхождении случайных флуктуаций рыночных цен.

В свете предложения 4 и теоремы 5 результат теоремы 4 оказывается интуитивно достаточно понятен. Значение повторяющейся игры $G_\infty(\mathbf{p})$ с не ограниченным заранее числом шагов равно ожидаемой продолжительности случайного блуждания апостериорных вероятностей, умноженной на постоянный одношаговый выигрыш инсайдера, равный $1/2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 1

Доказательство проводится методом индукции по числу шагов n.

$n=1$. Для $s<m$ наилучшим ответом игрока 1 является действие $k<m$ и $h_1^s(\tau^m)=\max_i a_{i,m}^s=a_{k,m}^s=m-s$.

Для $s=m$ наилучшим ответом игрока 1 является действие $k\le m$ и $h_1^m(\tau^m)=\max_i a_{i,m}^m=a_{k,m}^m=0$.

Для $s=m+1$ наилучшим ответом игрока 1 являются действия m или $m+1$ и $h_1^{m+1}(\tau^m)=\max_i a_{i,m}^{m+1}=a_{m,m}^{m+1}=a_{m+1,m}^{m+1}=0$.

Для $s>m+1$ наилучшим ответом игрока 1 является действие $m+1$ и $h_1^s(\tau^m)=\max_i a_{i,m}^s=a_{m+1,m}^s=(s-m-1)$.

Следовательно, $\mathbf{h}_1(\tau^k)=(k,k-1,\ldots,1,0,0,1,\ldots)$, что доказывает предложение 1 для $n=1$.

$n\to n+1$. Предположим, что векторные выигрыши $h_n(\tau^k)$ заданы с помощью (3) и (4). В соответствии с (2) получаем

$$h_{n+1}^s(\tau^m)=\max_i\begin{cases}a_{i,m}^s+h_n^s(\tau^{m-1}), & \text{если } i<m;\\ a_{i,m}^s+h_n^s(\tau^m), & \text{если } i=m;\\ a_{i,m}^s+h_n^s(\tau^{m+1}), & \text{если } i>m.\end{cases}$$

Для $s<m$ первым ходом наилучшего ответа игрока 1 является любое действие $i<m$, что приводит к $h_{n+1}^s(\tau^m)=a_{i,m}^s+h_n^s(\tau^{m-1})=(m-s)+$ $+\sum_{l=0}^{n-1}(m-s-1-l)^+=\sum_{l=0}^{n}(m-s-l)^+$.

Для $s=m$ первым ходом наилучшего ответа игрока 1 является любое действие $i<m$ и $i=m$, что приводит к $h_{n+1}^m(\tau^m)=a_{i,m}^m+h_n^m(\tau^{m-1})=$ $=a_{m,m}^m+h_n^m(\tau^m)=0$.

Для $s=m+1$ первыми ходами наилучших ответов игрока 1 являются действия m и $m+1$, что приводит к $h_{n+1}^{m+1}(\tau^m)=a_{m,m}^{m+1}+h_n^{m+1}(\tau^m)=$ $=a_{m+1,m}^{m+1}+h_n^{m+1}(\tau^{m+1})=0$.

Для $s>m+1$ первым ходом наилучшего ответа игрока 1 является действие $m+1$, что приводит к $h_{n+1}^s(\tau^m)=a_{m+1,m}^s+h_n^s(\tau^{m+1})=$ $=(s-m-1)+\sum_{l=0}^{n-1}(s-m-2-l)^+=\sum_{l=0}^{n}(s-m-1-l)^+$.

Это доказывает предложение 1 для $n+1$. ■

Доказательство теоремы 2

Легко убедиться, что для векторных выигрышей $h_n^s(\tau^m)$, задаваемых равенствами (4) и (5), $\lim_{n\to\infty}h_n^s(\tau^m)=h_\infty(\tau^m)=(s-m)(s-m-1)/2$. Поэтому существует следующая независимая от n верхняя граница

$H(\mathbf{p})$ для $V_n(\mathbf{p})$:

$$V_n(\mathbf{p}) \le H(\mathbf{p}) = \min_m \sum_{s=0}^{\infty} p_s (s-m)(s-m-l)/2, \quad m = 0,1,... \qquad (12)$$

Заметим, что при $\mathbf{E}[\mathbf{p}] = m + \alpha$,

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_s (s-m)(s-m-1)/2 = [(m^2+m) - (2m+1)\sum_{s=0}^{\infty} p_s s + \sum_{s=0}^{\infty} p_s s^2]/2 =$$

$$= [\sum_{s=0}^{\infty} p_s s^2 - (m+\alpha)^2 - \alpha + \alpha^2]/2 = [\mathbf{D}[\mathbf{p}] - \alpha(1-\alpha)]/2.$$

Следовательно, при $\mathbf{E}[\mathbf{p}] \in [k, k+1]$ минимум в формуле (12) достигается на векторном выигрыше с номером k, и справедливо равенство (5).

В частности, для $\mathbf{p} \in \Theta(k)$,

$$H(\mathbf{p}) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s (s-k)(s-k-1)/2 = \sum_{s=0}^{\infty} p_s (s-k)(s-k+1)/2 = \mathbf{D}[\mathbf{p}]/2. \blacksquare$$

Доказательство предложения 3

Достаточно проверить утверждение для игр $G_n(\mathbf{p}^r(k,l))$, соответствующих крайним точкам $\mathbf{p}^r(k,l)$ множества $\Theta(r)$, $r = 1,2,\ldots$ Доказательство проводится методом индукции по числу шагов n.

$n = 1$. Наилучший ответ игрока 2 на первый ход стратегии $\sigma^{\mathbf{p}}$ с $\mathbf{p} = \mathbf{p}^r(k,l)$ – любое действие l с $l \le r$. В результате одношаговый выигрыш игрока 1 равен $1/2$. Таким образом, для $\mathbf{p} = \mathbf{p}^r(k,l)$ стратегия $\sigma^{\mathbf{p}}$ гарантирует выигрыш $B_1(\mathbf{p}^r(k,l)) = 1/2$ в одношаговой игре $G_1(\mathbf{p}^r(k,l))$.

$n \to n+1$. Предположим, что стратегии $\sigma^{\mathbf{p}}$ с $\mathbf{p} = \mathbf{p}^r(k,l))$ в n-шаговых играх $G_n(\mathbf{p}^r(k,l))$ гарантируют выигрыши $B_n(\mathbf{p}^r(k,l))$.

Для $\mathbf{p} = \mathbf{p}^r(k,l)$ первый ход стратегии $\sigma^{\mathbf{p}}$ дает игроку 1 одношаговый выигрыш равный $1/2$. Его апостериорные вероятностные распределения – $\mathbf{p}^{r-1}(k+1,l-1))$ и $\mathbf{p}^{r+1}(k-1,l+1))$, которые случаются с вероятностью $1/2$.

Согласно индукционному предположению и формулам (1) и (12) в n-шаговых играх $G_n(\mathbf{p}^r(k,l))$ выигрыш игрока 1 равен

$$[1 + B_n(\mathbf{p}^{r-1}(k+1,l-1)) + B_n(\mathbf{p}^{r+1}(k-1,l+1))]/2 = B_{n+1}(\mathbf{p}).$$

Следовательно, стратегия $\sigma^{\mathbf{p}}$ гарантирует выигрыш $B_{n+1}(\mathbf{p})$ в $(n+1)$-шаговой игре $G_{n+1}(\mathbf{p})$ с $\mathbf{p} = \mathbf{p}^r(k,l)$. Нетрудно распространить этот результат на все $\mathbf{p} \in \cup_{r=1}^{\infty} \Theta(r)$. $\blacksquare$

Доказательство теоремы 3

Согласно теореме 2 и предложению 2 выполняются следующие неравенства: $B_n(\mathbf{p}) \le V_n(\mathbf{p}) \le H(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in M^2$.

Функции B_n и H – непрерывны, вогнуты и кусочно-линейны с одинаковыми областями линейности $L(r)$, $r = 0,1,\ldots$ Такие функции полностью определяются своими значениями в областях негладкости $\Theta(r), r = 1,2,\ldots$

Ввиду непрерывности и вогнутости функций B_n и H, для того чтобы установить сходимость последовательности B_n к H при $n \to \infty$, достаточно показать этот факт для $\mathbf{p} \in \Theta(r)$, $r = 1,2,\ldots$

Возрастающая последовательность непрерывных линейных функций B_n на $\Theta(r)$ ограничена сверху непрерывной линейной функцией H. Следовательно, она имеет непрерывную линейную предельную функцию B_∞.

Для доказательства теоремы 3 для случая $\mathbf{p} \in \Theta(r)$ достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} B_n(\mathbf{p}^r(k,l)) = B_\infty(\mathbf{p}^r(k,l)) = H(\mathbf{p}^r(k,l)) = k\,l/2 \quad \forall k,l.$$

Из (11) следует, что функция $B_\infty(\mathbf{p}^r(k,l))$ удовлетворяет равенству

$$B_\infty(\mathbf{p}^r(k,l)) = [1 + B_\infty(\mathbf{p}^{r+1}(k-1,l+1)) + B_\infty(\mathbf{p}^{r-1}(k+1,l-1))]/2$$

с граничными условиями $B_\infty(\mathbf{p}^{r+k}(0,l+k)) = B_\infty(\mathbf{p}^{r-l}(k+l,0)) = 0$.

Решая систему этих $k+l-1$ линейных уравнений, связывающих $k+l-1$ значений $B_\infty(\mathbf{p}^{r+m}(k-m,l+m))$, $m = -l+1,-l+2,\ldots,k-1$, для распределений с одним и тем же двухточечным носителем, мы получаем $B_\infty(\mathbf{p}^r(k,l)) = k\,l/2 = H(\mathbf{p}^r(k,l))$. Согласно (8) это доказывает теорему 3 для $\mathbf{p} \in \Theta(r), r = 0,1,\ldots$ Ввиду непрерывности и вогнутости функций V_n это верно для всех $\mathbf{p} \in M^2$. ■

Доказательство теоремы 4

Согласно следствию 2 стратегия $\sigma^{\mathbf{p}} \in \Sigma^+$ гарантирует выигрыш $H(\mathbf{p})$ в игре $G_\infty(\mathbf{p})$. Следовательно, для любого $\mathbf{p} \in M^2$ справедливо неравенство

$$\sup_{\Sigma^+} \inf_T K_\infty(\mathbf{p},\sigma,\tau) \ge H(\mathbf{p}), \tag{13}$$

и функция H является нижней границей для нижнего значения игры G_∞.

При этом согласно следствию 1 стратегии τ^r, $r = 0,1,\ldots$, гарантируют выигрыш $H(\mathbf{p})$ в бесконечной игре $G_\infty(\mathbf{p})$. Следовательно, для любого $\mathbf{p} \in M^2$ справедливо неравенство

$$\inf_T \sup_{\Sigma^+} K_\infty(\mathbf{p}, \sigma, \tau) \leq H(\mathbf{p}), \tag{14}$$

и функция H является верхней границей для верхнего значения игры G_∞.

Поскольку нижнее значение игры всегда не превышает верхнего, из неравенств (13) и (14) следует, что

$$\sup_{\Sigma^+} \inf_T K_\infty(\mathbf{p}, \sigma, \tau) = \inf_T \sup_{\Sigma^+} K_\infty(\mathbf{p}, \sigma, \tau) = H(\mathbf{p}) = V_\infty(\mathbf{p}).$$

Таким образом, стратегии $\sigma^{\mathbf{p}} \in \Sigma^+$ и τ^r, $r = 0, 1, \ldots$, обеспечивают значение $H(\mathbf{p}) = V_\infty(\mathbf{p})$ в игре $G_\infty(\mathbf{p})$ с заранее не ограниченным числом шагов. ■

Доказательство предложения 4

Для случайного блуждания $(\mathbf{p}_t)_{t=1}^\infty$ с начальным вероятностным распределением $(\mathbf{p}_t)_{t=1}^\infty$ переходные вероятности являются непрерывными линейными функциями на $\Theta(r)$. Поэтому ожидаемая продолжительность этого случайного блуждания до поглощения $\mathbf{E}[\theta(\mathbf{p})]$ – также непрерывная линейная функция на $\Theta(r)$.

Непрерывная линейная функция $\mathbf{E}[\theta(\mathbf{p})]$ на $\Theta(r)$, равная нулю в $\mathbf{e}^r$, имеет следующее «каноническое» представление в виде выпуклой комбинации своих значений в крайних точках $\mathbf{E}[\theta(\mathbf{p}^r(k,l))]$:

$$\mathbf{E}[\theta(\mathbf{p})] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p}) \mathbf{E}[\theta(\mathbf{p}^r(k,l))]$$

с коэффициентами $\alpha_{kl}(\mathbf{p})$, задаваемыми формулой (7).

Известно, что $\mathbf{E}[\theta(\mathbf{p}^r(k,l))] = k(m-k) = \mathbf{D}[\mathbf{p}^r(k,l)]$. Поскольку дисперсия $\mathbf{D}[\mathbf{p}]$ является непрерывной линейной функцией на $\Theta(r)$, мы получаем утверждение предложения 4. ■

Доказательство теоремы 5

При $\mathbf{p}_{t-1} \in \Theta(l)$ поглощение происходит с вероятностью $p_{t-1}(l)$. Если поглощение не происходит, то оптимальный ход игрока 1 использует ставки $l-1$ и l с равными полными вероятностями $1/2$. Оптимальный ход игрока 2 либо $l-1$, либо l. В обоих случаях вероятность равенства ставок равна $1/2$.

В первом случае игрок 1 покупает акцию по цене l. Тогда условное математическое ожидание ликвидной цены акции равняется $l+1$, и, следовательно, одношаговый выигрыш игрока 1 равен $1/2$.

Во втором случае покупателем является игрок 2, который покупает акцию по той же цене l. В этом случае условное математическое ожидание ликвидной цены акции равняется $l-1$, и, следовательно, одношаговый выигрыш игрока 1 также равен $1/2$. ■

Литература

Доманский В.К., Крепс В.Л. (2007). Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. Т. 14. Вып. 3. С. 399–416.

Крепс В.Л. (2009). Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // *Известия РАН. Теория и системы управления*. Вып. 4. С. 109–120.

Ширяев А.Н. (1998). Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС.

Aumann R., Maschler M. (1995). Repeated Games with Incomplete Information. Cambridge, London: The MIT Press.

Bachelier L. Theorie de speculation // *Ann. Ecole Norm. Sup*. 1900. Vol. 17. P. 21–86.

De Meyer B., Saley H. (2002). On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance // *Int. J. of Game Theory*. Vol. V.31. P. 285–319.

Domansky V. (2007). Repeated Games with Asymmetric Information and Random Price Fluctuations at Finance Markets // *Int. J. of Game Theory*. Vol. 36. I. 2., P. 241–257.

Domansky V., Kreps V. (2009). Repeated Games with Asymmetric Information and Random Price Fluctuations at Finance Markets: The Case of Countable State Space. Centre d'Economie de la Sorbonne. Univ. Paris 1, Pantheon, Sorbonne. Preprint 2009.40-MSE.

Kyle A.S. (1985). Continuous Auctions and Insider Trading // *Econometrica*. Vol. 53. P.1315–1335.

Mertens J.F., Sorin S., Zamir S. (1994). Repeated Games. CORE Discussion Paper 9420.

Milgrom P., Stokey N. (1982). Information, Trade and Common Knowledge // *J. of Econ. Theory*. Vol. 26 (1). P. 17–27.

Поступила в редакцию 13 июля 2010 г.

V.C. Domansky
St. Petersburg Institute for Economics and Mathematics, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg

V.L. Kreps
St. Petersburg Institute for Economics and Mathematics, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg

Game Theoretic Bidding Model: Strategic Aspects of Price Formation at Stock Markets

We consider a simplified model of finance market where two players carry on direct multistage bidding with risky assets (shares). One of the players (the insider) is informed on the liquidation price of a share, the other player knows its probability distribution only. It is shown that the optimal strategy of the insider generates a symmetric random walk of prices of transactions. The result confirms the conjecture on the strategic origin of regular stochastic fluctuations of stock market prices.

Keywords: *multistage bidding, asymmetric information, random walk, repeated games, optimal strategy.*

JEL Classification: C73; D82; D44.